# Ολοκληρώματα και ανισώσεις

Όλες οι συναρτήσεις που αναφέρονται στις παρακάτω προτάσεις είναι συνεχείς στο διάστημα ολοκλήρωσης

1. **Αν α < β και f(x) $\geq$0 για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **τότε** $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$
2. **Αν α < β και f(x) $\geq$0 για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **και f(x) μη μηδενική τότε** $\int_a^\beta f(x)dx > 0$
3. **Αν α < β και f(x) >0 για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **τότε** $\int_a^\beta f(x)dx > 0$
4. **Αν α < β και f(x) $\leq$0 για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **τότε** $\int_a^\beta f(x)dx \leq 0$
5. **Αν α < β και f(x) $\leq$ 0 για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **και f(x) μη μηδενική τότε** $\int_a^\beta f(x)dx < 0$
6. **Αν α < β και f(x) $\geq$0 για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **και** $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ **τότε f(x) = 0 στο [α, β]**

   <u>Απόδειξη</u>: Με άτοπο: Αν f(x) μη μηδενική στο [α, β] τότε…
7. **Αν** $f(x) \leq g(x)$ **για κάθε** $x \in [a, \beta]$ **τότε** $\int\limits_a^\beta f(x)dx \leq \int\limits_a^\beta g(x)dx$

   <u>Απόδειξη</u>: ισχύει $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geq 0$ άρα και

   $$\int_a^\beta \left(g(x) - f(x)\right)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta g(x)dx - \int_a^\beta f(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta g(x)dx \geq \int_a^\beta f(x)dx$$
8. **Ισχύει** $\left|\int_a^\beta f(x)dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$ **με α < β**

   <u>Απόδειξη</u>: για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει $-|x| \leq x \leq |x|$ . . .
9. **Αν m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα [α, β] τότε ισχύει** $m(\beta - a) \leq \int_a^\beta f(x)dx \leq M(\beta - a)$

   <u>Απόδειξη</u>: Βλέπε πρόταση 6…
10. **Αν α < β και** $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ **τότε υπάρχει** $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο ώστε f(ξ) >0**

    (απόδειξη με ΘΜΤ για μια αρχική F της f, ή με απαγωγή σε άτοπο)
11. **Αν α < β και** $\int_a^\beta f(x)dx < 0$ **τότε υπάρχει** $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο ώστε f(ξ) <0**

    (απόδειξη με ΘΜΤ για μια αρχική F της f, ή με απαγωγή σε άτοπο)
12. **Αν α < β και** $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ **τότε υπάρχει** $\xi \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο ώστε f(ξ) = 0**

    (απόδειξη με ΘΜΤ για μια αρχική F της f, ή με απαγωγή σε άτοπο)
13. **Αν ισχύει** $\int_a^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx$ **με α < β < γ < δ και β – α = δ – γ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in$ (α, β) και τουλάχιστον ένα $x_2 \in$ (γ, δ) τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.**
14. **Αν ισχύουν** $\int_a^\beta f(x)dx > 0$ **και** $\int_\beta^\gamma f(x)dx$ **<0 με α < β < γ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$ (α, γ) τέτοιο ώστε f(ξ) = 0.**